ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2 - *СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ И ВЕКТОРИ*

1. ТЕСТ ОСНОВНОГ ЗНАЊА (25)

1. Одредити сопствене вредности матрице $A=\begin{bmatrix}2&5&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&2\\0&0&3&5\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\quad \lambda_4=7)$ ***(јануар 2016.)***

2. Одредити производ сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A=0)$ ***(јул 2015.)***

3. Одредити сопствене вредности матрице $J_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=3)$ ***(фебруар 2015.)***

4. Производ сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&3&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, једнак је:

а) a^2-a; ***б)*** $a-6$; ***в)*** 0; ***г)*** 4; ***д)*** -6; ***ђ)*** ниједан од претходних одговора није тачан.

(јануар 2015.)

5. За матрицу $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\end{bmatrix}$ могуће је одредити:

а) карактеристични полином; ***б)*** минимални полином; ***в)*** сопствене вредности;
г) сопствене векторе; ***д)*** ранг; ***ђ)*** ниједан од претходних одговора није тачан.

(октобар 2014.)

6. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=\lambda-2)$ ***(октобар 2014.)***

7. Одредити производ сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&5&2\\0&-2&1\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A=27)$ ***(септембар 2014.)***

8. Збир сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&3&a\\0&4&-1\end{bmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$, једнак је:

а) $3+a$; ***б)*** $2a$; ***в)*** 0; ***г)*** 4; ***д)*** $a-1$; ***ђ)*** ниједан од претходних одговора није тачан. ***(јул 2014.)***

9. Одредити карактеристични полином матрице $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$(P_A(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda))$ ***(јун 2014.)***

10. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=(\lambda-3)^2=\lambda^2-6\lambda+9)$ ***(јануар 2014.)***

11. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=(\lambda-1)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3)$ ***(октобар 2013.)***

12. Одредити сопствене вредности матрице $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=2)$ ***(септембар 2013.)***

13. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=\lambda^2-4)$ ***(јул 2013.)***

14. Одредити карактеристични полином матрице $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$.

$(P_A(\lambda)=(5-\lambda)(4-\lambda)-6=\lambda^2-9\lambda+14=(\lambda-2)(\lambda-7))$ ***(јун 2013.)***

15. Збир сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ једнак је:

а) 2; ***б)*** 1; ***в)*** 0; ***г)*** -1; ***д)*** -2; ***ђ)*** ниједан од претходних одговора није тачан. ***(фебруар 2013.)***

16. Одредити минимални полином јединичне матрице I_n произвољног реда $n\in\mathbb{N}$.

$(\mu_{I_n}(\lambda)=\lambda-1)$ ***(јануар 2013.)***

17. Одредити сопствене вредности матрице $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

$(\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=4)$ ***(септембар 2012.)***

18. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2-3\lambda+2)$ ***(јул 2012.)***

19. Нека је A квадратна матрица реда n. Заокружити тачна тврђења:

а) карактеристични полином матрице A дели њен минимални полином ;

б) сопствене вредности матрице A су нуле њеног карактеристичног полинома;

в) матрица A анулира свој минимални полином;

г) степен карактеристичног полинома матрице A мањи је од n;

д) ниједан од претходних одговора није тачан. ***(фебруар 2012.)***

20. Одредити минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

$(\mu_A(\lambda)=\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)=\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda)$ ***(јул 2012.)***

21. Одредити сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

($\lambda_1=2,\ v_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ 0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ \alpha\neq 0,\ \ \lambda_2=3,\ v_2=\begin{bmatrix}0\\ \beta\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ \beta\neq 0$) ***(фебруар 2011.)***

22. Написати једну квадратну матрицу реда два чији су карактеристични и минимални полином једнаки.

(нпр. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$) ***(јануар 2011.)***

23. Нека је A квадратна матрица реда n. Заокружити тачна тврђења:

а) карактеристични полином матрице A је степена n ;

б) матрица A увек има n различитих сопствених вредности;

в) степен минималног полинома матрице A је мањи од степена њеног карактеристичног полинома;

г) ниједан од претходних одговора није тачан. ***(септембар 2010.)***

24. Нека су A и B еквивалентне матрице. Заокружити тачна тврђења:

а) матрице A и B имају исте карактеристичне полиноме; ***б)*** матрице A и B имају исте минималне полиноме;

в) $rangA=rangB$; ***г)*** матрице A и B имају исте сопствене вредности;

д) ниједан од претходних одговора није тачан. ***(октобар 2008.)***

25. Одредити вредност параметра $a\in\mathbb{R}$ тако да једна сопствена вредност матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 17 & 4\\ 0 & 5 & a\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$ буде једнака нули.

($a=10$) ***(октобар 2007.)***

2. <u>ИСПИТНИ ЗАДАЦИ</u> (20)

1. **[10]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\mu_A(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4,\lambda_1=4,v_1=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\lambda_2=-1,v_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

(јануар 2015.)

$$A^n=4^nC_1+(-1)^nC_2,C_1=\frac{1}{5}(A+I),C_2=\frac{1}{5}(-A+4I)$$

2. **[10]** Одредити карактеристични полином, сопствене вредности и сопствени(е) вектор(е) који одговара(ју) највећој сопственој вредности матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$. Израчунати карактеристични полином и сопствене вредности матрице A^{-1}.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1, \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1, v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

сопствене вредности матрице A^{-1} су $\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_2}=1, \frac{1}{\lambda_3}=-1$ ***(октобар 2015.)***

$$P_{A^{-1}}(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

3. **[8]** Одредити карактеристични полином, сопствене вредности и сопствени(е) вектор(е) који одговара(ју) најмањој сопственој вредности матрице $A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$. Израчунати $\det A$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^4-6\lambda^2-8\lambda-3, \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1, \lambda_4=3, v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$ ***(јул2015.)***

$$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=-3$$

4. **[9]** Одредити карактеристични полином, сопствене вредности и један (по избору) сопствени вектор матрице $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-5&-2&0\\11&8&0\end{bmatrix}$. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-9\lambda, \lambda_1=0, v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda_2=3, \lambda_3=-3,$$

(јун 2015.)

$$A^n=\begin{cases}9^k A, & n=2k+1\\ 9^{k-1}A^2, & n=2k\end{cases}$$

5. **[9]** Одредити карактеристични полином, сопствене вредности и сопствени(е) вектор(е) који одговара(ју) најмањој сопственој вредности матрице $A=\begin{bmatrix}4&-2&2\\-5&7&-5\\-6&6&-4\end{bmatrix}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12, \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=3, v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$ ***(фебруар 2014.)***

6. **[6]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}4&-1\\1&2\end{bmatrix}$. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\mu_A(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+9, \lambda_1=\lambda_2=3, v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$A^n=3^nC_1+n3^nC_2, C_1=I, C_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

(јануар 2014.)

***7.* [8]** Одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Израчунати $A^4-3A^3-3A^2+8A+5I$.

$$\lambda_1=2, v_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}, \lambda_2=3, v_2=\begin{bmatrix}-4\\1\\4\end{bmatrix}, \lambda_3=-1, v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

(јул 2017.)

$$A^4-3A^3-3A^2+8A+5I=A-I$$

***8.* [8]** Одредити карактеристични полином и сопствене вредности матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 4\end{bmatrix}$. Користећи Кејли-Хамилтонову теорему, израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^2-5\lambda-6, \lambda_1=6, \lambda_2=-1$$

$$A^n=6^nC_1+(-1)^nC_2, C_1=\frac{1}{7}(A+I), C_2=\frac{1}{7}(-A+6I)$$

(јун 2017.)

***9.* [9]** Дата је матрица $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\2 & -1 & -4\\2 & -4 & -1\end{bmatrix}$. Одредити њен минимални полином, као и A^n, $n\in\mathbb{N}$

$$\mu_A(\lambda)=\lambda^2+3\lambda-18$$

$$A^n=(-6)^nC_1+3^nC_2, C_1=-\frac{1}{9}(A-3I), C_2=\frac{1}{9}(A+6I)$$

(октобар 2017.)

***10.*[8]** Одредити вредност реалног параметра a тако да једна сопствена вредност матрице $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\0 & 3 & a\\0 & 4 & -1\end{bmatrix}$ буде једнака нули.

Затим одредити остале сопствене вредности матрице A и сопствени(е) вектор(е) који одговара(ју) највећој сопственој вредности.

$$a=-\frac{3}{4}, \lambda_1=\lambda_2=2, v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \lambda_3=0$$

(јануар 2013.)

***11.*[10]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Израчунати J^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^5-5\lambda^4, \mu_A(\lambda)=\lambda^2-5\lambda, \lambda_1=5, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$$

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, v_5=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$ ***(јул 2012.)***

$$J^n=5^{n-1}J$$

***12.*[7]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}7 & 4\\-9 & -5\end{bmatrix}$. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\mu_A(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1, \lambda_1=\lambda_2=1, v_1=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$ ***(јун 2012.)***

$$A^n=C_1+nC_2, C_1=I, C_2=A-I$$

***13.* [2+1+3+3]** Нека је дата матрица $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 21\\1 & 6 & -7\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$. Одредити: карактеристични полином дате матрице, њене сопствене вредности и њен минимални полином, сопствени вектор дате матрице који одговара њеној највећој сопственој вредности. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$, и одредити вредност израза $A^5-7A^4+7A^3+16A^2-7A+14I$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-13\lambda^2+55\lambda-75, \mu_A(\lambda)=\lambda^2-8\lambda+15$$

$$\lambda_1=\lambda_2=5, v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}7\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda_3=3, v_3=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}$$ ***(јун 2018.)***

$$A^n=3^nC_1+5^nC_2, C_1=-\frac{1}{2}(A-5I), C_2=\frac{1}{2}(A-3I)$$

$$A^5-7A^4+7A^3+16A^2-7A+14I=A-I$$

***14.* [2+1+3+3]** Нека је дата матрица $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -10\\3 & 6 & 10\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}$. Одредити: карактеристични полином дате матрице, њене сопствене вредности и њен минимални полином, сопствени вектор дате матрице који одговара њеној највећој сопственој вредности. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$, и одредити вредност израза $A^5-13A^4+55A^3-108A^2+135A-105I$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-17\lambda^2+91\lambda-147, \mu_A(\lambda)=\lambda^2-10\lambda+21$$

$$\lambda_1=\lambda_2=7, v_1=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-10\\0\\3\end{bmatrix}, \lambda_3=3, v_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$ ***(октобар 2018.)***

$$A^n=3^nC_1+7^nC_2, C_1=-\frac{1}{4}(A-7I), C_2=\frac{1}{4}(A-3I)$$

$$A^5-13A^4+55A^3-108A^2+135A-105I=A$$

***15.*[8]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}0 & a & a^2\\a^{-1} & 0 & a\\a^{-2} & a^{-1} & 0\end{bmatrix}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2,\mu_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1, v_1=\begin{bmatrix}-a\\1\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-a^2\\0\\1\end{bmatrix}, \lambda_3=2, v_3=\begin{bmatrix}a^2\\a\\1\end{bmatrix}$$ ***(фебруар 2011.)***

16. **[9]** У зависности од вредности параметра $a\in\mathbb{R}$ одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}3&a&0\\0&3&a\\0&0&3\end{bmatrix}$.

$$a=0:\ \ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3, v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

(јун 2016.)

$$a\neq 0:\ \ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3, v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

17.**[9]** Одредити карактеристични полином, сопствене вредности и један (по избору) сопствени вектор који одговара рационалној сопственој вредности матрице $A=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{bmatrix}$. Одредити A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-14\lambda, \lambda_1=0, v_1=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \lambda_2=\sqrt{14}\mathrm{i}, \lambda_3=-\sqrt{14}\mathrm{i}$$

(септембар 2016.)

$$A^n=\begin{cases}(-14)^k A, & n=2k+1\\ (-14)^{k-1}A^2, & n=2k\end{cases}$$

18. **[9]** Одредити карактеристични полином и сопствене вредности матрице $A=\begin{bmatrix}-1&6&-9\\-11&24&-33\\-6&12&-16\end{bmatrix}$. Одредити минимални полином матрице A и, користећи Кејли-Хамилтонову теорему, доказати једнакост $A^4=65A-114I$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12, \lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=3$$

$$\mu_A(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$$

$$A^2=5A-6I\ /\ A$$ ***(јул 2016.)***

$$A^3=5A^2-6A=5(5A-6I)-6A=19A-30I\ /\ A$$

$$A^4=19A^2-30A=19(5A-6I)-30A=95A-30A-114I=65A-114I$$

19. **[9]** Одредити вредност реалног параметра a тако да -1 буде сопствена вредност матрице $A=\begin{bmatrix}0&a&4\\1/2&0&a\\1/4&1/2&0\end{bmatrix}$. Затим одредити остале сопствене вредности дате матрице, њен карактеристични и минимални полином.

$a=2$:

$$\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=2$$ ***(октобар 2008.)***

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2,\mu_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2$$

20. **[13]** Одредити карактеристични полином, минимални полином, сопствене вредности и сопствене векторе матрице $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Израчунати A^n, $n\in\mathbb{N}$.

$$P_A(\lambda)=\lambda^3-6\lambda^2,\mu_A(\lambda)=\lambda^2-6\lambda$$

$$\lambda_1=\lambda_2=0,v_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\lambda_3=6,v_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$ ***(септембар 2008.)***

$$A^n=6^{n-1}A$$